Opitz

Studie über die Rudioschen Flächen.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät zu Rostock
behufs Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans R. G. Opitz,
Oberlehrer am Königstädtischen Realgymnasium zu Berlin.

BERLIN 1901.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

Referent: Kaiserlich Russischer Staatsrat a. D. Prof. Dr. O. Staude.

Seinen lieben Eltern

in dankbarer Erinnerung

gewidmet.

Im fünfzehnten Abschnitt seiner „Application de l'analyse à la géometrie" hat *G. Monge* die allgemeine Theorie derjenigen Flächen entwickelt, welche die Örter der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte für eine gegebene Fläche darstellen[1]).

Seine Untersuchungen führten ihn auf das umgekehrte Problem, zu zwei gegebenen Flächen, welche als die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche anzusehen sind, die Originalfläche zu finden. Er gelangt zu folgenden Bedingungen, welchen die beiden gegebenen Flächen unterworfen sein müssen, wenn sie fähig sein sollen, die Evolutenfläche einer zu bestimmenden Fläche abzugeben[2]): erstens dürfe der Grad ihrer algebraischen Gleichung nur eine gerade Zahl sein, und zweitens müssen die scheinbaren Umrisse ihrer beiden Schalen einander rechtwinklig schneiden.

Obgleich nun dieser berühmte Geometer seine Theorie auf Flächen angewendet hat, welche als spezielle Fälle der allgemeinsten Flächen zweiten Grades anzusehen sind[3]), so ist er dennoch nicht darauf verfallen, zwei konfokale Flächen zweiter Ordnung, welche bekanntlich den genannten beiden Bedingungen Genüge leisten, als Schalen der Centrafläche einer zu bestimmenden Fläche anzunehmen. Wenigstens steht fest, dafs die Lösung dieses Problems ihm nicht gelungen ist, sei es, dafs es ihn beschäftigt hat oder nicht. Dies hat darin seinen Grund, dafs zur Zeit *Monge*s das wichtige Hülfsmittel der elliptischen Koordinaten, mit welchem *Lamé* und *C. G. J. Jacobi* später so grofse Erfolge erzielten[4]), den Geometern noch nicht zu Gebote gestanden hat.

Erst im Jahre 1851 (die vierte Auflage des *Monge*schen Werkes war schon im Jahre 1809 erschienen) hat *J. Liouville* diese Flächen, deren Existenz von *Chasles* auf

---

[1]) G. Monge, Application de l'analyse à la géometrie. Vième Ed. par J. Liouville. Paris 1850: § 15. Des deux courbures d'une surface courbe, VI.

[2]) Monge, a. a. O. pag. 136: „1° que son équation algébrique soit d'un degré pair; 2° que les contours apparents de ses deux nappes soient rectangulaires entre eux. Toutes celles qui ne remplissent pas ces deux conditions ne peuvent former que la surface des centres d'une des courbures et doivent être conjuguées avec une autre surface courbe, qui sera celle des centres de l'autre courbure, et pour laquelle il suffira que les contours apparents de l'une et de l'autre soient rectangulaires, de quelque point qu'on les regarde". — Herr Rudio zeigt in § 1 seiner ersten Arbeit (vgl. Fufsnote [2]), S. 4), dafs das Mongesche Kriterium zu viel verlangt.

[3]) Monge, pag. 246 a. a. O., betrachtet die Kugel und findet als zweite Schale den Kegel.

[4]) Lamé ist der Schöpfer dieses Instruments; vgl. ferner: Jacobi, 28. Vorlesung über Dynamik: Kürzeste Linie auf dem Ellipsoid.

geometrischem Wege a priori festgestellt worden war, einer näheren Betrachtung unterzogen und ihre Differentialgleichung aufgestellt[1]); indessen die unmittelbare Zurückführung ihrer rechtwinkligen Koordinaten auf Quadraturen mittels der elliptischen Koordinaten ist erst in neuester Zeit gelungen.

Zwei wesentlich von einander verschiedene Wege haben zur Lösung dieser Aufgabe geführt.

Der erste Weg, welchen man als die *Chasles-Kummer*sche Methode bezeichnen kann, ist von Herrn *Rudio* im Jahre 1880 eingeschlagen worden[2]). *Chasles* hatte dasjenige Strahlensystem, welches von den gemeinschaftlichen Tangenten zweier konfokalen Flächen zweiten Grades gebildet wird, als ein Normalensystem erkannt. Die Methode, welche *E. E. Kummer* in seiner klassischen Schrift „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“[3]) niedergelegt hat, kann demnach als Wegweiser für die Bestimmung der gesuchten Evolventenfläche dienen.

Der zweite Weg, welchen Herr *A. von Braunmühl* drei Jahre später beschritten hat, könnte der *Monge-Weingarten*sche genannt werden, denn er knüpft unmittelbar an das allgemeine von *Monge* gestellte Problem an, „zu einer vorgelegten Fläche (Ausgangsfläche) diejenige Fläche (Originalfläche) zu bestimmen, für welche die gegebene eine Schale der Fläche der Krümmungscentra bildet“[4]), und benutzt dabei als Ausgangspunkt ein von Herrn *Weingarten* bereits im Jahre 1863 aufgestelltes Theorem[5]). Herrn *von Braunmühl* gelingt die Lösung des *Monge*schen Problems allgemeiner für die sogenannten *Liouville*schen Flächen, welche dadurch gekennzeichnet sind, dafs für sie das Quadrat des Linienelements auf die Form

$$ds^2 = (f(u) - F(v))(du^2 + dv^2)$$

gebracht werden kann, indem er nicht nur die Koordinaten der Originalfläche, sondern auch diejenigen der zweiten Schale der Krümmungscentrafläche, welche er Komplementärfläche genannt hat, durch die Gröfsen u und v darstellt.

---

[1]) J. Liouville, Sur un théorème de M. Chasles. Journal de math. p. et appl. T. XVI, 1851, pag. 6. Man vgl. auch Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. 2ième vol. Paris 1889, wo das 14. Kapitel „La surface de M. Liouville“ behandelt. Die bereits 1880 erschienene Diss. Rudios (vgl. [2])) wird hier nicht erwähnt.

[2]) F. Rudio, Über diejenigen Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen II. Grades sind. Diss. Berl. 1880. Hier ist auch das über Dupins Cycliden nötige gesagt, bei welchen die beiden Schalen der Centrafläche in zwei Kegelschnitte degenerieren.

[3]) Journal für die r. u. a. Math. Bd. 57, 1860; auch Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Raumes, Bd. 2, pag. 223 ff. der 3. Auflage vom Jahre 1880.

[4]) A. von Braunmühl, Über die reducirte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. Abhandl. d. math.-phys. Klasse der Kgl. bayer. Akad. d. W. 1883, pag. 94.

[5]) J. Weingarten, Über die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. Journ. f. d. r. u. a. Math. Bd. 62, 1863, pag. 61:

„Spannt man über eine gegebene Fläche, senkrecht gegen eine willkürlich auf derselben gezeichnete Curve, eine Schaar biegsamer Fäden, denen man sämmtlich, von den Punkten dieser Curve an gerechnet, gleiche Länge giebt, so erzeugen die Endpunkte dieser Fäden bei ihrer Abwickelung die allgemeinste Fläche, von welcher die gegebene eine Schale der Fläche der Krümmungsmittelpunkte ist“.

Herr *von Braunmühl* konnte hiernach für seine Resultate den Vorzug der gröfseren Allgemeinheit wohl beanspruchen. Wenn er aber zugleich und scheinbar mit Recht behauptete, dafs sein Weg auch den Vorzug der gröfseren Kürze habe, so ist dieser Vorwurf des gröfseren Aufwands an Rechnung von Herrn *Rudio* selbst durch die gleichzeitige Veröffentlichung der zweiten Behandlung seines Problems[1]) entkräftet worden, welche unter Anwendung einiger bekannter Transformationsformeln der analytischen Geometrie durch eine höchst elegante Analyse das Ziel erreicht.

Diese Analyse hat nun insbesondere den Zusammenhang, der zwischen den Krümmungslinien einer Fläche und den geodätischen Linien der Krümmungsmittelpunktsfläche besteht, dadurch erkennen lassen, dafs die abgeleitete Formel vollkommen identisch ist mit derjenigen, welche *Jacobi* bei der Rektifikation der kürzesten Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid entwickelt hat. Es hat sich auch hier gezeigt, dafs durch *hyperelliptische* Integrale die Koordinaten der Originalfläche konfokaler Flächen zweiten Grades gefunden werden. Das Ergebnis des Herrn *Rudio*: „Unsere Aufgabe hat uns zu einer ganzen Klasse von neuen Flächen geführt. Die allgemeinsten, deren Centrenflächen sich aus zwei allgemeinen konfokalen Flächen zweiten Grades zusammensetzen, werden durch die einfachsten hyperelliptischen Integrale ausgedrückt" gilt aber zunächst nur für den Fall, dafs die „allgemeinen" konfokalen Flächen zweiten Grades denjenigen Flächen angehören, welche als Mittelpunktsflächen der zweiten Art zu bezeichnen sind. Die Klassifikation der Oberflächen zweiter Ordnung[2]), welche die parabolischen Flächen den Mittelpunktsflächen gegenüberstellt, regt beim Studium der *Rudio*schen Flächen zur weiteren Bestimmung der Originalfläche insbesondere der parabolischen Flächen an. Diese Bestimmung unter Anwendung der *parabolischen Koordinaten* liefert dann auch eine Bestätigung der Thatsache, dafs die geodätischen Linien auf den Paraboloiden durch *elliptische* Integrale gefunden werden. Analoge Entwickelungen findet man in dem Buche des Herrn *O. Böklen* über „Analytische Geometrie des Raumes"[3]), wo die *Liouville*sche Differentialgleichung der Flächen, deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei konfokalen Flächen zweiten Grades liegen, für die verschiedenen Arten von Flächen auf elementarem, dem Verfasser eigentümlichem Wege hergeleitet ist. Dadurch wird noch Veranlassung gegeben, das Verhältnis näher zu betrachten, in welchem die Resultate des Herrn *Rudio* zu der *Liouville*schen Behandlung des Problems stehen.

Wir werden zuvörderst die Ergebnisse der *Rudio*schen Analyse anführen und dabei Gelegenheit haben, einen Zeichenfehler zu berichtigen, der sich durch die beiden genannten Arbeiten zieht und welchen auch *Cayley* in sein Referat „On Rudio's inverse centro-surface"[4]) kritiklos übertragen hat.

---

[1]) Zur Theorie der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind. Journal Bd. 95, Berlin 1883, pag. 240.

[2]) K. Hensel, Über die Classifikation der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung. Journal Bd. 113, Berlin 1894, pag. 316.

[3]) 2. Auflage, Stuttgart 1884. §§ 25–29.

[4]) Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Vol. XXII, 1887, pag. 156.

1.

Die von *E. E. Kummer* neu begründete „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“ enthält die Theorie der Krümmung der Flächen und der Systeme ihrer Normalen als speziellen Fall in sich.

Jede gerade Linie des Systems wird nach *Kummer* bestimmt durch einen Punkt (x, y, z), wodurch sie geht, und ihre Richtungskosinus ξ, η, ζ. Das Gesetz, welches die Linien zu einem Systeme verbindet, wird dadurch gegeben, dafs $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ als kontinuierliche Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen u, v bestimmt werden. Der Punkt (x, y, z) liegt alsdann auf einer bestimmten Fläche, und die Strahlen werden als von den Punkten dieser Fläche ausgehend betrachtet.

Wenn es nun eine Fläche giebt, für welche jeder Strahl eine Normale ist, und es bezeichnen x', y', z' die Koordinaten des Punktes derselben, in welchem der durch $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ bestimmte Strahl des Systems auf ihr normal steht, so ist

$$\begin{aligned} x' &= x + \varrho \cdot \xi \\ y' &= y + \varrho \cdot \eta \\ z' &= z + \varrho \cdot \zeta, \end{aligned} \tag{1}$$

wenn mit ϱ die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z') bezeichnet wird. Weil aber der Strahl Normale zu der Fläche sein soll, so mufs

$$\xi dx' + \eta dy' + \zeta dz' = 0$$

sein. Wegen der Relationen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$
$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0$$

folgt hierfür

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz + d\varrho = 0$$

oder

$$-d\varrho = \left(\xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u}\right) du + \left(\xi \frac{\partial x}{\partial v} + \eta \frac{\partial y}{\partial v} + \zeta \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv. \tag{2}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential einer Funktion $-\varrho$ von u und v sein soll, so mufs das Strahlensystem der Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\xi \frac{\partial x}{\partial v} + \eta \frac{\partial y}{\partial v} + \zeta \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

genügen, damit es ein System von Normalen einer Fläche sei. Diese Bedingung ist auch hinreichend, denn wenn sie erfüllt ist, so kann ϱ aus der Gleichung (2) als Funktion von u und v bestimmt werden, und das System (1) giebt dann die Gleichungen einer Fläche, deren Normalen die Strahlen des Systems sind. Wegen der willkürlichen Konstante, die dabei auftritt, erhält man eine Schar von Parallelflächen.

Dies vorausgesetzt, stellt sich Herr *Rudio* zuerst folgende Aufgabe:

„Es seien zwei konfokale Flächen zweiten Grades (λ) und (μ), welche nicht von derselben Art sein sollen, durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1$$

und

$$\frac{x^2}{a-\mu}+\frac{y^2}{b-\mu}+\frac{z^2}{c-\mu}=1.$$

gegeben. Durch einen beliebigen Punkt der Fläche (λ) gehen alsdann zwei gerade Linien, welche die beiden Flächen (λ) und (μ) berühren. Es sollen die Richtungskosinus dieser beiden Geraden bestimmt werden".

Wenn durch den Punkt (x, y, z) der Fläche (λ) noch die beiden konfokalen Flächen (u) und (v) gehen, welche durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}=1$$

$$\frac{x^2}{a-v}+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v}=1$$

bestimmt sind, so dafs also u, v, λ die elliptischen Koordinaten des Punktes (x, y, z) sind, für welche bekanntlich die Beziehungen

$$x^2=(a-\lambda)\frac{(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}$$

$$y^2=(b-\lambda)\frac{(b-u)(b-v)}{(b-c)(b-a)}$$

$$z^2=(c-\lambda)\frac{(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}$$

bestehen, dann werden die gesuchten Richtungskosinus ξ, η, ζ durch die Ausdrücke

$$\xi=x\left(\frac{U}{a-u}\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{a-v}\frac{\mu-v}{u-v}\right)$$

$$\eta=y\left(\frac{U}{b-u}\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{b-v}\frac{\mu-v}{u-v}\right)$$

$$\zeta=z\left(\frac{U}{c-u}\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{c-v}\frac{\mu-v}{u-v}\right)$$

gegeben, wo U und V folgende Werte bezeichnen:

$$U=\sqrt{\frac{(a-u)(b-u)(c-u)}{(\lambda-u)(\mu-u)}}$$

$$V=\sqrt{\frac{(a-v)(b-v)(c-v)}{(\lambda-u)(\mu-v)}}.$$

Aus den Relationen zwischen den rechtwinkligen und elliptischen Koordinaten folgt nunmehr

$$2x\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{(a-\lambda)(a-v)}{(a-b)(a-c)} \qquad 2x\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{(a-\lambda)(a-u)}{(a-b)(a-c)}$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{(b-\lambda)(b-v)}{(b-c)(b-a)} \qquad 2y\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{(b-\lambda)(b-u)}{(b-c)(b-a)}$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{(c-\lambda)(c-v)}{(c-a)(c-b)} \qquad 2z\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{(c-\lambda)(c-u)}{(c-a)(c-b)},$$

und demnach

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-\lambda}{(a-b)(a-c)}}\cdot\sqrt{\frac{a-v}{a-u}} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-\lambda}{(a-b)(a-c)}}\cdot\sqrt{\frac{a-u}{a-v}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-\lambda}{(b-c)(b-a)}}\cdot\sqrt{\frac{b-v}{b-u}} \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-\lambda}{(b-c)(b-a)}}\cdot\sqrt{\frac{b-u}{b-v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\lambda}{(c-a)(c-b)}}\cdot\sqrt{\frac{c-v}{c-u}} \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\lambda}{(c-a)(c-b)}}\cdot\sqrt{\frac{c-u}{c-v}}.$$

Mit Hülfe dieser Werte findet man

$$\xi\frac{\partial x}{\partial u}+\eta\frac{\partial y}{\partial u}+\zeta\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{1}{2U}$$

und

$$\xi\frac{\partial x}{\partial v}+\eta\frac{\partial y}{\partial v}+\zeta\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{1}{2V}.$$

Daher erhält die Differentialgleichung (2) die Gestalt

$$d\varrho=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{U}+\frac{dv}{V}\right),$$

und die Integration ergiebt[1])

$$\varrho=\frac{1}{2}\left(\int\frac{du}{U}+\int\frac{dv}{V}\right).$$

Da nun x, y, z; ξ, η, ζ und ϱ bekannte Funktionen der beiden Veränderlichen u und v

---

[1]) Herr Rudio schliefst wiederholt:

$$-d\varrho=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{U}+\frac{dv}{V}\right)$$

$$\varrho=\frac{1}{2}\left(\int\frac{du}{U}+\int\frac{dv}{V}\right);$$

er bemerkt nicht, dafs bei der Differentiation von x, y, z nach u und v der Faktor (—1) auftritt, wegen (a—u) etc. Die Gröfsen $\frac{1}{2U}$ und $\frac{1}{2V}$ müssen dann die entgegengesetzten Zeichen erhalten, wodurch richtig kommt:

$$+d\varrho=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{U}+\frac{dv}{V}\right).$$

sind, so lauten die Gleichungen der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen die gegebenen konfokalen Flächen zweiten Grades sind:

$$x' = x + \varrho \cdot \xi$$
$$y' = y + \varrho \cdot \eta$$
$$z' = z + \varrho \cdot \zeta.$$

In Betreff der Gröfsen U und V ist noch hinzuzufügen, dafs sie für die in Betracht kommenden Wertsysteme u, v reell sind. Ihre Vorzeichen sind willkürlich, aber auf gleiche Weise zu fixieren.

2.

Durch die Einführung der elliptischen Koordinaten ist es also Herrn *Rudio* gelungen, die Differentialgleichung

$$\left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial v}\right) dv = - d\varrho$$

mit Hülfe der einfachsten hyperelliptischen Integrale zu lösen.

In seiner ersten Arbeit hat er nun gewisse Spezialfälle der konfokalen Flächen zweiter Ordnung näher betrachtet, besonders den Fall, wo eine der beiden Flächen in einen Fokalkegelschnitt degeneriert, wo nämlich ein Ellipsoid und die dazu gehörige Fokalhyperbel gegeben sind. Die Originalfläche konnte hier genau so bestimmt werden wie in dem allgemeinen Falle. Herr *Rudio* hat jedoch diesen Spezialfall behandelt, indem er in seinen Formeln für λ und μ einfach die Werte $\lambda = 0$ und $\mu = b$ einführte; er wurde bei diesem speziellen Problem auf elliptische Integrale geführt.

Es ist bekannt, dafs man aus den Mittelpunktsflächen zweiten Grades die parabolischen Flächen durch einen gewissen Grenzübergang ableiten kann. Es fragt sich also, ob dieser Übergang auf die obigen *Rudio*schen Formeln ohne weiteres übertragbar ist, oder ob die Aufgabe entsteht, die Rechnung neu durchzuführen.

Man gelangt von den konfokalen Mittelpunktsflächen zweiten Grades zu den parabolischen Flächen auf folgendem Wege[1]).

Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten, welcher der Mittelpunkt der Fläche

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

sei, in den einen Scheitelpunkt, d. h. setzt man für x den Wert $x - \sqrt{a}$, so erhält man aus (I), wenn zugleich

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = p, \qquad \frac{c}{\sqrt{a}} = q$$

gesetzt werden,

$$\frac{x^2}{\sqrt{a}} + \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

[1]) Herr Hensel (a. a. O.) rechnet zwei Oberflächen in eine Klasse, wenn jede von ihnen in die andere durch eine reale *endliche* Koordinatentransformation übergeführt werden kann.

Läfst man jetzt a über alle Grenzen wachsen, auch b und c, aber so, dafs p und q endlich bleiben, so folgt die Gleichung des Paraboloids

$$\text{(II)} \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Durch dasselbe Verfahren erhält man aus der zu (I) konfokalen Fläche

$$\text{(Ia)} \qquad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0$$

das zu (II) konfokale Paraboloid

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{y^2}{p-\mu} + \frac{z^2}{q-\mu} - 2x + \mu = 0,$$

wenn der Parameter μ beim Grenzübergang durch die Beziehung

$$\lambda = \mu \cdot \sqrt{a}$$

eingeführt wird.

Man erhält also hiernach aus dem konfokalen System der Ellipsoide und Hyperboloide dasjenige der Paraboloide, indem man erstens die Transformationsformeln

$$x = x_1 - \omega, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1$$

anwendet, dann für die Konstanten a, b, c, λ durch die Gleichungen

$$a = \omega^2, \qquad b = \omega \cdot p, \qquad c = \omega \cdot q, \qquad \lambda = \omega \cdot \mu$$

die neuen Konstanten ω, p, q, μ einführt und ω über alle Grenzen wachsen läfst[1]).

Der Versuch, die Gleichungen der Originalfläche in derselben Weise zu transformieren, gelingt nun in der That. Das Ergebnis ist, dafs die Gröfsen

$$x = \frac{u + v + \lambda - p - q}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{(p-u)(p-v)(p-\lambda)}{q-p}}$$

$$z = \sqrt{\frac{(q-u)(q-v)(q-\lambda)}{p-q}}$$

zusammen mit

$$\xi = -\left[\frac{\mu-u}{v-u}U + \frac{\mu-v}{u-v}V\right]$$

$$\eta = y \cdot \left[\frac{\mu-u}{v-u}\frac{U}{p-u} + \frac{\mu-v}{u-v}\frac{V}{p-v}\right]$$

$$\zeta = z \cdot \left[\frac{\mu-u}{v-u}\frac{U}{q-u} + \frac{\mu-v}{u-v}\frac{V}{q-v}\right],$$

---

[1]) O. Staude, Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Leipzig 1896, Anm. III, 3; pag. 177.

wobei jetzt aber

$$U = \sqrt{\frac{(p-u)(q-u)}{(\lambda-u)(\mu-u)}}$$

$$V = \sqrt{\frac{(p-v)(q-v)}{(\lambda-v)(\mu-v)}}$$

zu setzen ist, das Strahlensystem definieren, welches von den gemeinschaftlichen Tangenten zweier konfokalen *parabolischen* Flächen gebildet wird.

Obgleich der angedeutete Weg der einfachere ist, so wollen wir die Rechnung dennoch neu durchführen, weil einerseits die teilweise veränderte Gestalt der Formeln hier dasselbe Interesse beansprucht wie bei denjenigen Untersuchungen, welche die Herren *Böklen* und *Staude* unter Benutzung ebenfalls der *parabolischen Koordinaten* angestellt haben[1]), andererseits aber die eingangs erwähnte Vergleichung dieser Resultate mit denen *Liouvilles* die genauere Kenntnis der Analyse erfordert.

3.

Diejenigen Entwickelungen, welche sich an die Einführung der *parabolischen Koordinaten* knüpfen, hat neuerdings Herr *Staude* so vollständig gegeben[2]), dafs wir uns hier auf die Herleitung der zu unseren Rechnungen notwendigen Formeln beschränken wollen.

Ist

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0, \qquad (p > q)$$

die Gleichung eines Paraboloids, so werden alle ihm konfokalen Paraboloide durch die Gleichung

(1)
$$\frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} - 2x + \lambda = 0$$

dargestellt. Hier bedeuten p und q konstante Gröfsen, welche als gegeben angenommen werden; λ ist die halbe Scheiteldistanz. Da man der Gröfse λ jeden beliebigen Wert beilegen kann, so giebt es unendlich viele konfokale Flächen (λ). Geht durch einen Punkt (x, y, z) des Raumes eine derselben, so läfst sich λ aus der Gleichung dritten Grades (1) ermitteln, deren Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heifsen mögen. Es läfst sich leicht nachweisen, dafs diese drei Wurzeln reell sind und in folgenden Intervallen liegen:

$$-\infty < \lambda_1 < q < \lambda_2 < p < \lambda_3 < +\infty.$$

Für $\lambda = \lambda_1$ ist

$$p - \lambda_1 > 0, \qquad q - \lambda_1 > 0:$$

man hat ein elliptisches Paraboloid, dessen positive Achse die x-Achse ist, ein sogenanntes *rechtes elliptisches Paraboloid*[3]);

für $\lambda = \lambda_2$ ist

$$p - \lambda_2 > 0, \qquad q - \lambda_2 < 0:$$

man hat also ein *hyperbolisches Paraboloid*;

---

[1]) Vgl. [3]), oben pag. 5 und [1]), pag. 10.

[2]) In dem oben pag. 10, [1]) genannten Werke. Man vgl. auch Böklen § 28.

[3]) Diese Nomenklatur habe ich bei Herrn Staude zuerst angetroffen.

für $\lambda = \lambda_3$ endlich ist

$$p - \lambda_3 < 0, \qquad q - \lambda_3 < 0:$$

dies giebt ein elliptisches Paraboloid, dessen negative Achse die x-Achse ist, ein sogenanntes *linkes elliptisches Paraboloid.*

Alle Betrachtungen, welche man bei Gelegenheit der Einführung der elliptischen Koordinaten anzustellen hat, lassen sich auch hier durchführen. Man findet, dafs die drei konfokalen Paraboloide (λ_1), (λ_2), (λ_3) ein orthogonales Flächensystem bilden, und dafs sie sich also dem *Dupin*schen Satze gemäfs in ihren Krümmungslinien schneiden.

Den drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entsprechend gelten folgende Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{y^2}{p-\lambda_1} + \frac{z^2}{q-\lambda_1} - 2x + \lambda_1 = 0, && -\infty < \lambda_1 < q, \\ &\frac{y^2}{p-\lambda_2} + \frac{z^2}{q-\lambda_2} - 2x + \lambda_2 = 0, && q < \lambda_2 < p, \\ &\frac{y^2}{p-\lambda_3} + \frac{z^2}{q-\lambda_3} - 2x + \lambda_3 = 0, && p < \lambda_3 < +\infty. \end{aligned}$$

Hiernach sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eindeutig bestimmt durch x, y, z, und sie bestimmen eindeutig x, y^2, z^2, also im allgemeinen vier Punkte. Sehen wir zu, wie die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z irgend eines Punktes im Raume durch die drei Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ausgedrückt werden.

Für jeden Wert λ mufs

$$(3)\quad \frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} - 2x + \lambda = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(p-\lambda)(q-\lambda)}$$

sein. Daher kann man y^2 und z^2, durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ausgedrückt, leicht erhalten, wenn man $p - \lambda$ oder $q - \lambda$ einer unendlich kleinen Gröfse gleichsetzt[1]):

$$(4)\quad \begin{aligned} y^2 &= -\frac{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)(p-\lambda_3)}{p-q} \\ z^2 &= \frac{(q-\lambda_1)(q-\lambda_2)(q-\lambda_3)}{p-q}; \\ x &= \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-p-q}{2} \end{aligned}$$

ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung der symmetrischen Funktionen der Wurzeln der kubischen Gleichung (1). Wenn man nun die identische Gleichung (3) für λ nach λ differenziert, so folgt:

$$\frac{y^2}{(p-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(q-\lambda)^2} + 1 = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(p-\lambda)(q-\lambda)}\left(\frac{1}{\lambda-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda-\lambda_2} + \frac{1}{\lambda-\lambda_3} + \frac{1}{p-\lambda} + \frac{1}{q-\lambda}\right),$$

---

[1]) Vgl. G. Kirchhoff, Vorl. über math. Physik. Mechanik. 3. Aufl. 1883, pag. 202.

und setzt man $\lambda - \lambda_1$ oder $\lambda - \lambda_2$ oder $\lambda - \lambda_3$ einer unendlich kleinen Gröfse gleich, so erhält man

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{y^2}{(p-\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(q-\lambda_1)^2} + 1 &= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(p-\lambda_1)(q-\lambda_1)} \\ \frac{y^2}{(p-\lambda_2)^2} + \frac{z^2}{(q-\lambda_2)^2} + 1 &= \frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{(p-\lambda_2)(q-\lambda_2)} \\ \frac{y^2}{(p-\lambda_3)^2} + \frac{z^2}{(q-\lambda_3)^2} + 1 &= \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p-\lambda_3)(q-\lambda_3)}. \end{aligned}$$

Dazu stellen wir ein zweites Gleichungensystem auf, welches leicht aus demjenigen (2) folgt, das λ_1, λ_2 und λ_3 definiert:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{y^2}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)} + \frac{z^2}{(q-\lambda_1)(q-\lambda_2)} + 1 &= 0 \\ \frac{y^2}{(p-\lambda_2)(p-\lambda_3)} + \frac{z^2}{(q-\lambda_2)(q-\lambda_3)} + 1 &= 0 \\ \frac{y^2}{(p-\lambda_3)(p-\lambda_1)} + \frac{z^2}{(q-\lambda_3)(q-\lambda_1)} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen geben, zusammen mit den leicht herzustellenden

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} &= \frac{1}{2} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} &= -\frac{1}{2}\frac{y}{p-\lambda_1} & \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} &= -\frac{1}{2}\frac{z}{q-\lambda_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} &= \frac{1}{2} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} &= -\frac{1}{2}\frac{y}{p-\lambda_2} & \frac{\partial z}{\partial \lambda_2} &= -\frac{1}{2}\frac{z}{q-\lambda_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_3} &= \frac{1}{2} & \frac{\partial y}{\partial \lambda_3} &= -\frac{1}{2}\frac{y}{p-\lambda_3} & \frac{\partial z}{\partial \lambda_3} &= -\frac{1}{2}\frac{z}{q-\lambda_3} \end{aligned}$$

das Kriterium dafür, dafs die parabolischen Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3 ein orthogonales System bilden, denn die Bedingungen für Orthogonalsysteme:

$$\sum_{(x,y,z)} \frac{\partial x}{\partial \lambda_\iota}\frac{\partial x}{\partial \lambda_\mu} = 0, \qquad \begin{pmatrix} \iota \lesseqgtr \mu \\ 1,2,3 \end{pmatrix}$$

sind — wie man sofort sieht — erfüllt. Auch die Relationen[1])

$$\sum_{(x,y,z)} \frac{\partial x}{\partial \lambda_\iota}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda_\mu \partial \lambda_\nu} = 0, \qquad \begin{pmatrix} \iota \gtreqless \mu \gtreqless \nu \\ 1,2,3 \end{pmatrix},$$

welche den *Dupin*schen Satz aussprechen, dafs die drei Scharen von Flächen, die einander überall unter rechtem Winkel treffen, sich gegenseitig in ihren Krümmungskurven schneiden, gelten hier, da ja die beiden ersten Gleichungen (4) die Beziehung geben:

$$(8)\qquad \frac{y^2}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)(p-\lambda_3)} + \frac{z^2}{(q-\lambda_1)(q-\lambda_2)(q-\lambda_3)} = 0.$$

---

[1]) Vgl. z. B. J. Knoblauch, Allg. Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888, pag. 120 f.

Endlich können wir noch die Formeln (vgl. (5))

$$(9)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 &= \frac{1}{4}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(p-\lambda_1)(q-\lambda_1)} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{(p-\lambda_2)(q-\lambda_2)} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_3}\right)^2 &= \frac{1}{4}\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p-\lambda_3)(q-\lambda_3)}, \end{aligned}$$

aufstellen, durch welche das Linienelement in parabolischen Koordinaten gegeben wird:

$$(10)\qquad ds^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(p-\lambda_1)(q-\lambda_1)}d\lambda_1^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{(p-\lambda_2)(q-\lambda_2)}d\lambda_2^2 + \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p-\lambda_3)(q-\lambda_3)}d\lambda_3^2\right].$$

4.

Um dasjenige Transformationsproblem näher zu präzisieren, welches bei der Herleitung der Formeln für die Originalfläche konfokaler Paraboloide eine Rolle spielt, haben wir nach Herrn *Rudio* zuvörderst folgende Betrachtungen anzustellen.

Seien

$$\frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} - 2x + \lambda = 0$$

$$\frac{y^2}{p-\mu} + \frac{z^2}{q-\mu} - 2x + \mu = 0$$

die Gleichungen zweier konfokalen Paraboloide (λ) und (μ), welche zwar nicht von derselben Art sein dürfen, da sie sonst keine gemeinschaftlichen Tangenten haben können, für welche aber die Parameter λ und μ im übrigen ganz beliebige Werte haben. Die beiden, durch einen beliebigen Punkt (x, y, z) der Fläche (λ) gehenden Geraden, welche die Flächen (λ) und (μ) berühren müssen, falls diese die beiden Schalen der Evolutenfläche einer zu bestimmenden Fläche abgeben sollen, liegen zunächst auf der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Tangentialebene der Fläche (λ), deren Gleichung

$$\frac{yy'}{p-\lambda} + \frac{zz'}{q-\lambda} - x' - x + \lambda = 0$$

ist, wenn x', y', z' ihre laufenden Koordinaten bezeichnen.

Andererseits liegen jene beiden gemeinschaftlichen Tangenten auf dem Tangentialkegel, der vom Punkte (x, y, z) an die Fläche (μ) gelegt werden kann. Dieser Kegel hat zur Gleichung

$$P \cdot R - Q^2 = 0,$$

wo

$$P = \frac{(y'-y)^2}{p-\mu} + \frac{(z'-z)^2}{q-\mu}$$

$$Q = \frac{y(y'-y)}{p-\mu} + \frac{z(z'-z)}{q-\mu} - (x'-x)$$

$$R = \frac{y^2}{p-\mu} + \frac{z^2}{q-\mu} - 2x + \mu$$

sind. Denkt man sowohl jene Tangentialebene als auch diesen Tangentialkegel parallel mit sich nach dem Ursprung der Koordinaten verschoben, so werden ihre Gleichungen die folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{yy'}{p-\lambda} + \frac{zz'}{q-\lambda} - x' = 0,$$

$$\left(\frac{y^2}{p-\mu} + \frac{z^2}{q-\mu} - 2x + \mu\right)\left(\frac{y'^2}{p-\mu} + \frac{z'^2}{q-\mu}\right) - \left(\frac{yy'}{p-\mu} + \frac{zz'}{q-\mu} - x'\right)^2 = 0.$$

Sind jetzt ξ, η, ζ die Richtungskosinus einer jener gemeinschaftlichen Tangenten, so gelten demnach für sie die Gleichungen

$$\frac{y\eta}{p-\lambda} + \frac{z\zeta}{q-\lambda} - \xi = 0,$$

$$\left(\frac{y^2}{p-\mu} + \frac{z^2}{q-\mu} - 2x + \mu\right)\left(\frac{\eta^2}{p-\mu} + \frac{\xi^2}{q-\mu}\right) - \left(\frac{y\eta}{p-\mu} + \frac{z\zeta}{q-\mu} - \xi\right)^2 = 0.$$

Wenn nun die Gleichungen

$$\frac{y^2}{p-u} + \frac{z^2}{q-u} - 2x + u = 0$$

$$\frac{y^2}{p-v} + \frac{z^2}{q-v} - 2x + v = 0$$

$$\frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} - 2x + \lambda = 0$$

diejenigen konfokalen Flächen darstellen, welche durch den Punkt (x, y, z) der Fläche (λ) gehen, so lassen sich also u, v, λ als Orthogonalkoordinaten, und zwar als die parabolischen Koordinaten des Punktes (x, y, z) auffassen. Die Normalen dieser Flächen (u), (v) und (λ) im Punkte (x, y, z) bilden mit den Koordinatenachsen die Richtungskosinus

$$-\frac{p_1}{x-u}, \quad \frac{p_1 y}{(x-u)(p-u)}, \quad \frac{p_1 z}{(x-u)(q-u)},$$

$$-\frac{p_2}{x-v}, \quad \frac{p_2 y}{(x-v)(p-v)}, \quad \frac{p_2 z}{(x-v)(q-v)},$$

$$-\frac{p_3}{x-\lambda}, \quad \frac{p_3 y}{(x-\lambda)(p-\lambda)}, \quad \frac{p_3 z}{(x-\lambda)(q-\lambda)},$$

wenn p_1, p_2, p_3 die Lote bezeichnen, welche vom Anfangspunkt der Koordinaten auf die Tangentialebenen, die (λ), (u) und (v) im Punkte (x, y, z) berühren, gefällt werden können. Auf diese Normalen als neue Koordinatenrichtungen sollen jene beiden Gleichungen für

ξ, η, ζ transformiert werden. Hat der betrachtete Strahl, dessen Richtungskosinus ξ, η, ζ sind, in Beziehung auf das neue System die Richtungskosinus ξ', η', ζ', so lauten hiernach die Transformationsformeln:

$$\xi = -\xi'\frac{p_1}{x-u} - \eta'\frac{p_2}{x-v} - \zeta'\frac{p_3}{x-\lambda}$$

$$\eta = \xi'\frac{p_1 y}{(x-u)(p-u)} + \eta'\frac{p_2 y}{(x-v)(p-v)} + \zeta'\frac{p_3 y}{(x-\lambda)(p-\lambda)}$$

$$\zeta = \xi'\frac{p_1 z}{(x-u)(q-u)} + \eta'\frac{p_2 z}{(x-v)(q-v)} + \zeta'\frac{p_3 z}{(x-\lambda)(q-\lambda)}.$$

Um diese Transformation durchzuführen, bedürfen wir noch einiger Hülfsrelationen[1]).

Bezeichnen wir

(a) $$\frac{y^2}{p-\mu} + \frac{z^2}{q-\mu} - 2x + \mu = M,$$

so ist die Bedeutung von M durch Formel **3.** (3) gegeben. Wenn wir dazu die Gleichung

(b) $$\frac{y^2}{p-u} + \frac{z^2}{q-u} - 2x + u = 0$$

nehmen, so erhalten wir

(c_1) $$\frac{y^2}{(p-\mu)(p-u)} + \frac{z^2}{(q-\mu)(q-u)} + 1 = \frac{M}{\mu-u},$$

und ebenso, wegen der Fläche (v):

(c_2) $$\frac{y^2}{(p-\mu)(p-v)} + \frac{z^2}{(q-\mu)(q-v)} + 1 = \frac{M}{\mu-v};$$

beide Gleichungen zusammen geben

(d) $$\frac{y^2}{(p-\mu)(p-u)(p-v)} + \frac{z^2}{(q-\mu)(q-u)(q-v)} = \frac{M}{(\mu-u)(\mu-v)}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{yy'}{p-u} + \frac{zz'}{q-u} - x' = x-u$$

folgt für den Abstand dieser Tangentialebene vom Anfangspunkt der Koordinaten:

$$p_1 = \frac{x-u}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{(p-u)^2} + \frac{z^2}{(q-u)^2}}}.$$

Deshalb ist also

(e) $$\frac{y^2}{(p-u)^2} + \frac{z^2}{(q-u)^2} + 1 = \frac{(x-u)^2}{p_1^2},$$

---

[1]) Die analogen Formeln für centrische Flächen bei Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Raumes, Bd. 1, pag. 215, 3. Aufl. 1879.

und es folgt aus (c_1) und (e):

$$\frac{y^2}{(p-u)^2(p-\mu)}+\frac{z^2}{(q-u)^2(q-\mu)}=\frac{M}{(\mu-u)^2}-\frac{(x-u)^2}{p_1^2(\mu-u)}.$$

Diesen Relationen lassen sich sofort die folgenden an die Seite stellen:

(e_1)
$$\frac{y^2}{(p-v)^2}+\frac{z^2}{(q-v)^2}+1=\frac{(x-v)^2}{p_2^2}$$

$$\frac{y^2}{(p-v)^2(p-\mu)}+\frac{z^2}{(q-v)^2(q-\mu)}=\frac{M}{(\mu-v)^2}-\frac{(x-v)^2}{p_2^2(\mu-v)},$$

und ebenso:

(e_2)
$$\frac{y^2}{(p-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(q-\lambda)^2}+1=\frac{(x-\lambda)^2}{p_3^2}$$

$$\frac{y^2}{(p-\lambda^2)(p-\mu)}+\frac{z^2}{(q-\lambda)^2(q-\mu)}=\frac{M}{(\mu-\lambda)^2}-\frac{(x-\lambda)^2}{p_3^2(\mu-\lambda)}.$$

5.

Durch die Formeln des vorigen Abschnitts sind wir nun in den Stand gesetzt, auf die Paraboloide auch den Satz zu übertragen, von welchem die definitive Lösung des *Rudio*schen Problems abhängt, nämlich zu zeigen, dafs die Gleichung des betrachteten Tangentialkegels die Form

$$A\xi'^2+B\eta'^2+C\zeta'^2=0$$

annimmt, wenn die Normalen der durch seinen Scheitel gehenden konfokalen Paraboloide als Koordinatenrichtungen gewählt werden.

Die Gleichung des Kegels lautete:

$$\left(\frac{y^2}{p-\mu}+\frac{z^2}{q-\mu}-2x+\mu\right)\left(\frac{\eta^2}{p-\mu}+\frac{\zeta^2}{q-\mu}\right)-\left(\frac{y\eta}{p-\mu}+\frac{z\zeta}{q-\mu}-\xi\right)^2=0.$$

Setzt man hier für ξ, η, ζ die pag. 16 angegebenen Werte, so erhält man unter Berücksichtigung von **4.** (a) drei Glieder von folgender Form:

$$\frac{p_1^2}{(x-u)^2}M\left[\frac{y^2}{(p-u)^2(p-\mu)}+\frac{z^2}{(q-u)^2(q-\mu)}\right]\xi'^2,$$

wofür wegen **4.** (e) kommt:

$$\frac{p_1^2}{(x-u)^2}M\left[\frac{M}{(\mu-u)^2}-\frac{(x-u)^2}{p_1^2(\mu-u)}\right]\xi'^2.$$

Ferner folgen drei Ausdrücke, von denen der erste

$$\frac{2p_1p_2}{(x-u)(x-v)}M\left[\frac{y^2}{(p-u)(p-v)(p-\mu)}+\frac{z^2}{(q-u)(q-v)(q-\mu)}\right]\xi'\eta'$$

heifst; derselbe ist nach **4.** (d) gleich zu setzen

$$\frac{2p_1p_2M^2\xi'\eta'}{(x-u)(x-v)(\mu-u)(\mu-v)}.$$

Endlich hat man das Quadrat der Summe von drei Gliedern folgender Form zu bilden:

$$\frac{p_1}{x-u}\left[\frac{y^2}{(p-u)(p-\mu)}+\frac{z^2}{(q-u)(q-\mu)}+1\right]\xi',$$

wofür man nach **4.** (c)

$$\frac{p_1 M \xi'}{(x-u)(\mu-u)}$$

erhält. Jetzt sieht man, dafs die Gleichung des Tangentialkegels, nachdem man noch durch M dividiert hat, übergeht in

$$\frac{\xi'^2}{\mu-u}+\frac{\eta'^2}{\mu-v}+\frac{\zeta'^2}{\mu-\lambda}=0.$$

Viel einfacher als diese ist die Transformation der Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{y\eta}{p-\lambda}+\frac{z\zeta}{q-\lambda}-\xi=0$$

auf die neuen Achsenrichtungen. Eine leichte Rechnung ergiebt hierfür folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}0= &\frac{p_1}{x-u}\left(\frac{y^2}{(p-u)(p-\lambda)}+\frac{z^2}{(q-u)(q-\lambda)}+1\right)\xi'\\ &+\frac{p_2}{x-v}\left(\frac{y^2}{(p-v)(p-\lambda)}+\frac{z^2}{(q-v)(q-\lambda)}+1\right)\eta'\\ &+\frac{p_3}{x-\lambda}\left(\frac{y^2}{(p-\lambda)(p-\lambda)}+\frac{z^2}{(q-\lambda)(q-\lambda)}+1\right)\zeta'.\end{aligned}$$

Nach **3.** (6) und **4.** (e_2) verschwinden die beiden ersten Klammern, während die dritte den Wert $\frac{(x-\lambda)^2}{p_3^2}$ hat. Die transformierte Gleichung heifst demnach

$$\zeta'=0.$$

Nunmehr können wir ξ', η', ζ' aus den Gleichungen

$$\frac{\xi'^2}{\mu-u}+\frac{\eta'^2}{\mu-v}+\frac{\zeta'^2}{\mu-\lambda}=0$$

$$\zeta'=0$$

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=1$$

ermitteln und erhalten

$$\xi'=\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}}$$

$$\eta'=\sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}$$

$$\zeta'=0.$$

Durch diese Werte folgt dann

$$\xi = -\left[\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}}\,\frac{p_1}{x-u} + \sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}\,\frac{p_2}{x-v}\right]$$

$$\eta = y\cdot\left[\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}}\,\frac{p_1}{(x-u)(p-u)} + \sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}\,\frac{p_2}{(x-v)(p-v)}\right]$$

$$\zeta = z\cdot\left[\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}}\,\frac{p_1}{(x-u)(q-u)} + \sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}\,\frac{p_2}{(x-v)(q-v)}\right].$$

Jetzt wollen wir die Werte von $\frac{p_1}{x-u}$ und $\frac{p_2}{x-v}$ als Funktionen der parabolischen Koordinaten u, v und λ hier einführen. Es ist (vgl. **3.** (5)):

$$\frac{p_1}{x-u} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{(p-u)^2}+\frac{z^2}{(q-u)^2}}} = \sqrt{\frac{(p-u)(q-u)}{(u-\lambda)(u-v)}}$$

$$\frac{p_2}{x-v} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{(p-v)^2}+\frac{z^2}{(q-v)^2}}} = \sqrt{\frac{(p-v)(q-v)}{(v-\lambda)(v-u)}}$$

$$\frac{p_3}{x-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{(p-\lambda)^2}+\frac{z^2}{(q-\lambda)^2}}} = \sqrt{\frac{(p-\lambda)(q-\lambda)}{(\lambda-u)(\lambda-v)}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{(p-u)(q-u)}{(\lambda-u)(\mu-u)}} = U$$

$$\sqrt{\frac{(p-v)(q-v)}{(\lambda-v)(\mu-v)}} = V,$$

so folgt

$$\frac{p_1}{x-u} = U\cdot\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}}$$

$$\frac{p_2}{x-v} = V\cdot\sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}},$$

und wir erhalten die Gröfsen ξ, η, ζ in der Form, in der wir sie oben bereits angegeben haben (**2.** pag. 10).

Benutzen wir nun weiter, dafs

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}$$

$$y\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{(p-v)(p-\lambda)}{p-q} \qquad y\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{(p-u)(p-\lambda)}{p-q}$$

$$z\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{(q-v)(q-\lambda)}{q-p} \qquad z\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{(q-u)(q-\lambda)}{q-p}$$

ist, so ergiebt sich durch elementare Rechnung

$$\xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{1}{2U},$$

und ebenso

$$\xi \frac{\partial x}{\partial v} + \eta \frac{\partial y}{\partial v} + \zeta \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{2V}.$$

Die Differentialgleichung **1.** (2), welche nunmehr die Form

$$d\varrho = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{U} + \frac{dv}{V}\right)$$

erhält, läfst sich integrieren, da die Variablen getrennt sind. Die Gleichungen der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen zwei konfokale Paraboloide sind, lauten demnach

$$x' = x + \varrho \cdot \xi$$
$$y' = y + \varrho \cdot \eta$$
$$z' = z + \varrho \cdot \zeta,$$

wo x, y, z; ξ, η, ζ bekannte Funktionen von u und v sind und ϱ auch hier gegeben ist durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{1}{2}\left(\int \frac{du}{U} + \int \frac{dv}{V}\right).$$

Dafs übrigens die Bedingung (pag. 6)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

erfüllt wird, sieht man sofort.

Die Gröfsen U und V sind hier so beschaffen, dafs die Koordinaten der Originalfläche nebst ihren Parallelflächen nur durch *elliptische* Integrale dargestellt werden. Für die in Betracht kommenden Wertsysteme (u, v) sind sie reell. Das läfst sich durch eine Überlegung zeigen, welche ganz ähnlich ist derjenigen, die Herr *Rudio* in seiner ersten Arbeit angestellt hat.

Die beiden gegebenen Paraboloide (λ) und (μ) müssen reelle Durchdringungen haben. Man hat also nur folgende drei Fälle zu unterscheiden: die Flächen (λ) und (μ) sind

1.) ein *rechtes* und ein *hyperbolisches*,
2.) ein *rechtes* und ein *linkes*,
3.) ein *hyperbolisches* und ein *linkes* Paraboloid.

Betrachten wir den ersten Fall[1]). Da U und V in Beziehung auf λ und μ

[1]) Die anderen Fälle erledigen sich ebenso. — Dieser wird hier absichtlich behandelt, denn er entspricht folgendem Rudioschen (Diss. pag. 13) nicht behandelten:

$$\lambda_1 < c < \lambda_2 < b < \lambda_3 < a$$
$$\lambda \quad \mu$$
$$v \quad u$$

symmetrisch sind, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit (λ) als das rechte und (μ) als das hyperbolische Paraboloid ansehen. Dann folgt das Schema (vgl. pag. 11):

$$-\infty < \lambda_1 < q < \lambda_2 < p < \lambda_3 < +\infty$$

λ	μ	
	u	v
$p-u>0$		$p-v<0$
$q-u<0$		$q-v<0$
$\lambda-u<0$		$\lambda-v<0$
		$\mu-v<0$

$\mu-u>0$ ergiebt sich aber, wenn man bedenkt, dafs hier nur solche Werte u ins Auge gefafst werden dürfen, welche kleiner als μ sind. Es dürfen nämlich hier nur solche Punkte der Fläche (λ) in Betracht gezogen werden, die *innerhalb* des von der Fläche (μ) eingeschlossenen Raumes liegen, denn nur durch diese lassen sich gemeinschaftliche Tangenten an die konfokalen Flächen legen. Dafs wir $u = \text{const.}$ als Schar der hyperbolischen, $v = \text{const.}$ dagegen als die der linken elliptischen Paraboloide angenommen haben, beeinträchtigt den Beweis nicht, wie man sich sofort überzeugt.

6.

Herr *Rudio* macht wiederholt auf die Beziehung aufmerksam, in welcher die Bestimmung der Originalfläche konfokaler Flächen zweiten Grades zu derjenigen der kürzesten Linien auf denselben steht. Die Formel

$$\varrho = \frac{1}{2}\left(\int\frac{du}{U}+\int\frac{dv}{V}\right)$$

ist zwar genau dieselbe wie die, welche *Jacobi* bei der Lösung dieses Problems zuerst erhalten hat; dadurch wird aber nicht gerechtfertigt, dafs Herr *Rudio* die eingangs angeführte Arbeit *Liouville*s, welche seiner Aufgabe doch näher als die *Jacobi*sche steht, unberücksichtigt gelassen hat. Wir wollen daher im Anschlufs an die Untersuchungen des Herrn *Böklen* die Differentialgleichung für die Originalfläche konfokaler Paraboloide aufstellen.

Seien (u, v, w) die parabolischen Koordinaten irgend eines Punktes im Raume. Ein benachbarter Punkt $(u+du, v+dv, w+dw)$ bestimme mit jenem das Linienelement ds. Bezeichnen ds_1, ds_2, ds_3 die Kanten desjenigen Parallelepipedons, welches

---

Hier ist:

$a-u>0$	$a-v>0$
$b-u<0$	$b-v>0$
$c-u<0$	$c-v<0$
$\lambda-u<0$	$\lambda-u<0$
$\mu-u<0$	$\mu-v$ (?)

(μ) und (v) sind hier einschalige Hyperboloide, also *convex-concave* Flächen. Daher kommen auch hier nur solche Werte v in Betracht, für welche $(\mu - v)>0$. U und V sind also reelle Gröfsen.

durch die sechs parabolischen Flächen begrenzt wird, die durch die Endpunkte von ds gehen, so hat man

$$\xi \cdot ds = ds_1$$
$$\eta \cdot ds = ds_2$$
$$\zeta \cdot ds = ds_3,$$

wenn ξ, η, ζ die Richtungskosinus von ds in Bezug auf die Normalen der drei durch den ersten Punkt gehenden Flächen sind. Wegen der Beziehung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

folgt sowohl

(1) $$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_2^2$$

als auch

(2) $$ds = \xi ds_1 + \eta ds_2 + \zeta ds_3.$$

Vergleichen wir (1) mit dem bereits aufgestellten Ausdruck für ds^2 (Formel **3.** (10)), so erhalten wir die Werte

$$ds_1^2 = \frac{1}{4} \frac{(u-v)(u-w)}{(p-u)(q-u)} du^2$$
$$ds_2^2 = \frac{1}{4} \frac{(v-w)(v-u)}{(p-v)(q-v)} dv^2$$
$$ds_3^2 = \frac{1}{4} \frac{(w-u)(w-v)}{(p-w)(q-w)} dw^2.$$

Auch für ξ, η, ζ lassen sich Ausdrücke in den parabolischen Koordinaten aufstellen, wenn man den Satz zu Hülfe nimmt, dafs unter den Flächen eines konfokalen Systems im allgemeinen zwei existieren, welche eine gegebene gerade Linie berühren[1]).

Sind (λ) und (μ) die Flächen, welche die durch ds bestimmte Gerade zur gemeinschaftlichen Tangente haben, so folgt aus den Erörterungen des Abschnitts **5.**, dafs die Wurzeln der quadratischen Gleichung für $\varkappa$

$$\frac{\xi^2}{u-\varkappa} + \frac{\eta^2}{v-\varkappa} + \frac{\zeta^2}{w-\varkappa} = 0$$

die Gröfsen λ und μ sind. Zur Bestimmung von ξ, η, ζ hat man also die Gleichungen[2]):

$$\frac{\xi^2}{u-\lambda} + \frac{\eta^2}{v-\lambda} + \frac{\zeta^2}{w-\lambda} = 0$$
$$\frac{\xi^2}{u-\mu} + \frac{\eta^2}{v-\mu} + \frac{\zeta^2}{w-\mu} = 0$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

---

[1]) Salmon-Fiedler a. a. O. Bd. 1, pag. 220.

[2]) Man vgl. auch Journal d. math. p. et appl., t. XI, 1846: Chasles, Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales.

Durch elementare Rechnung findet man folgende Werte:

$$\xi^2 = \frac{(u-\lambda)(u-\mu)}{(u-v)(u-w)}$$

$$\eta^2 = \frac{(v-\lambda)(v-\mu)}{(v-w)(v-u)}$$

$$\zeta^2 = \frac{(w-\lambda)(w-\mu)}{(w-u)(w-v)}.$$

Mithin erhalten wir für den Wert des Linienelements (2)

$$ds = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{(u-\lambda)(u-\mu)}{(p-u)(q-u)}}\,du + \sqrt{\frac{(v-\lambda)(v-\mu)}{(p-v)(q-v)}}\,dv + \sqrt{\frac{(w-\lambda)(w-\mu)}{(p-w)(q-w)}}\,dw\right]$$

oder

$$ds = \frac{1}{2}\left[\frac{du}{U} + \frac{dv}{V} + \frac{dw}{W}\right],$$

wo die Bezeichnung keiner Erklärung bedarf.

Die Gröfsen λ und μ sind Funktionen der parabolischen Koordinaten u, v, w. Sei

$$\lambda = \varphi(u, v, w),$$

$$\mu = \psi(u, v, w).$$

Ist die Kurve gegeben, deren Element ds sein soll, so werden φ und ψ gegebene Funktionen von u, v, w sein. Der Ausdruck für ds wird einfacher, wenn die gegebene Kurve z. B. auf der Fläche (w) liegt. Alsdann ist

$$dw = 0,$$

und die Fläche (w) ist eine der Flächen (λ) oder (μ), da alle Tangenten der Kurve die Fläche (w) berühren. Das Element der geodätischen Linien auf (w) erhält man, indem man nicht nur φ, sondern auch ψ einer Konstante gleichsetzt:

$$ds = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{(u-\lambda)(u-\mu)}{(p-u)(q-u)}}\,du + \sqrt{\frac{(v-\lambda)(v-\mu)}{(p-v)(q-v)}}\,dv\right];$$

denn ihre Tangenten berühren zugleich eine zweite konfokale Fläche. ds hat dann denselben Ausdruck wie $d\varrho$.

Die *Liouville*sche Differentialgleichung endlich erhalten wir sofort, wenn wir diejenigen Werte von u, v, w ins Auge fassen, für welche ds den Wert Null hat. Die Gleichung

$$\frac{du}{U} + \frac{dv}{V} + \frac{dw}{W} = 0$$

ist demnach die Differentialgleichung derjenigen Fläche, deren Krümmungsmittelpunktsfläche aus den beiden Schalen (λ) und (μ) besteht[1]).

Hiermit ist nachgewiesen, dafs beide Deduktionen, die *Rudio*sche sowohl als auch die *Liouville*sche, ihre gemeinschaftliche Grundlage in denselben Sätzen über die konfokalen Flächen zweiten Grades haben. —

---

[1]) Man findet eine Darstellung nach Liouville-Darboux auch bei Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899, § 285.

Druck von W. Pormetter, Berlin.